Systèmes polynomiaux avec grosse multiplicité locale

Proposition de stage Master 2 Mathématiques Fondamentales
par Frédéric BIHAN (LAMA, Université Savoie Mont Blanc)
frederic.bihan@univ-smb.fr

La multiplicité maximale d'une racine complexe non nulle d'un polynôme est égale à son degré d. Cette borne est atteinte par le polynôme $P(X) = (X-1)^d$ par exemple. Le degré d est aussi égal au nombre total de racines complexes, comptées avec multiplicité. Il est facile de voir que si certains coefficients du polynôme sont nuls, alors la multiplicité maximale est strictement inférieure au degré, alors que le nombre de racines complexes reste égal au degré. Précisément, cette multiplicité maximale est égal au nombre de monômes moins un apparaissant avec coefficients non nuls. Ce nombre de monômes moins un est également une borne optimale sur le nombre de racines strictement positives d'un polynôme en une variable à coefficients réels.

En plusieurs variables, on peut poser la question de la multiplicité maximale en une solution à coordonnées complexes non nulles d'un système polynomial formé de n équations polynomiales en n variables. A. Gabrielov a obtenu dans [7] une borne sur cette multiplicité maximale en fonction du nombre total de monômes du système. La borne de Gabrielov est très similaire à la fameuse borne de Khovanskii (voir [9, 1]) sur le nombre de solutions à coordonnées strictement positives d'un système du même type mais à coefficients réels. Les bornes de Gabrielov et de Khovanskii sont loin d'être optimales. La borne de Kohanskii a été améliorée par F. Bihan et F. Sottile dans [1]. Pour certaines familles de systèmes polynomiaux, on connait des bornes optimales sur le nombre de solutions positives, voir le livre [11] par exemple.

Dans un article qui vient d'apparaitre F. Bihan et A. Dickenstein ont obtenu des améliorations sous certaines conditions de la borne de Gabrielov sur la multiplicité locale maximale qui sont optimales pour certaines familles de systèmes polynomiaux. Cet article met aussi en évidence des relations entre les questions précédentes. L'objectif du stage sera d'étudier les articles mentionnés plus haut et d'essayer de voir dans un premier temps comment les méthodes de l'article [1] pourraient s'adapter pour améliorer la borne obtenue par Gabrielov, au moins pour des familles simples de systèmes polynomiaux (comme dans [6, 10]). Ce stage est à l'interface entre la géométrie algébrique réelle et la géométrie algébrique complexe, dans l'esprit du livre [11]. Il permettrait de s'initier à la géométrie torique, la théorie des A-

discriminants et la géométrie tropicale ([3, 5, 4, 8]) qui sont des outils utiles pour les problèmes mentionnés plus haut. Ce stage pourrait être le point de départ d'une thèse encadrée par Frédéric Bihan.

Références

[1] F. Bihan and F. Sottile : *New fewnomial upper bounds from Gale dual polynomial systems*, Mosc. Math. J. 7 :3 , 387–407, 2007.

[2] F. Bihan, A. Dickenstein, J. Forsgaard : *Sparse systems with high local multiplicity*, disponible sur ArXiv au lien https ://arxiv.org/pdf/2402.08410.pdf.

[3] E. Brugallé, I. Itenberg, B. Teissier : *Géométrie tropicale*, Journées mathématiques X-UPS 2008, Les éditions de l'École Polytechnique.

[4] G. Mikhalkin, *Tropical Geometry and its applications*,

[5] A. Dickenstein, R. Piene : *Higher order selfdual toric varieties*, Annali Mat. Pur. Appl. 195, n.5, 1759–1777, 2017.

[6] P. Koiran, M. Skomra : *Intersection multiplicity of a sparse curve and a low degree curve*, Journal of Pure and Applied Algebra, 224(7), 2020.

[7] A. Gabrielov : *Multiplicities of pfaffian intersections, and the Lojasiewicz inequality*, Selecta Mathematica : New Series. March 1995 1(1) :113-127.

[8] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky : *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants.* Mathematics Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994.

[9] A. Khovanskii : *Fewnomials*, Translations of Mathematical Monographs Vol. 88, AMS, 1991.

[10] I. Nikitin : *Bivariate systems of polynomial equations with roots of high multiplicity*, J. Algebra Appl. 22, No. 01, 2023.

[11] F. Sottile : *Real Solutions to Equations From Geometry*, University Lecture Series volume 57, AMS, 2011. 200+viii pages.